

RELATIONS BINAIRES ET APPLICATIONS

Exercice 1 — On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{-x^2} . \end{cases}$$

- (1) (a) Montrer que f est paire.
 (b) Etudier f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
- (2) (a) f est-elle injective ?
 (b) f est-elle surjective ?
- (3) (a) Déterminer $f([-1, +\infty[)$.
 (b) Déterminer $f^{-1}([1, 2])$.
- (4) On considère la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow]0, 1] \\ x & \longmapsto e^{-x^2} . \end{cases}$$

- (a) Montrer que g est bijective et déterminer sa réciproque.
- (5) (a) Montrer que la composée $g^{-1} \circ f$ est bien définie.
 (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g^{-1} \circ f(x) = x$.
 (c) Soit $x \in \mathbb{R}_*$, calculer $g^{-1} \circ f(x)$.

Exercice 2 — Le but de ce problème est de déterminer toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) > f \circ f(n) \tag{1}$$

- (1) Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ vérifie [Equation \(1\)](#)
 (2) Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant [Equation \(1\)](#). On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n = \llbracket n; +\infty \llbracket$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble E_n est stable par $f : f(E_n) \subset E_n$.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geq n$.
 (c) Montrer que f est strictement croissante.
 (d) En déduire que $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
- (3) Conclure.